

Übungsblatt 3 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 9: Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch ist und gib einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an:

- Es seien (X, \leq) und (Y, \trianglelefteq) geordnete Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine streng monoton steigende Funktion, dann ist f injektiv.
- Es sei (X, \leq) eine totalgeordnete Menge, (Y, \trianglelefteq) eine geordnete Menge und $f : X \rightarrow Y$ eine streng monoton steigende Funktion, dann ist f injektiv.
- Es seien (X, \leq) und (Y, \trianglelefteq) totalgeordnete Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine injektive Funktion, dann ist f streng monoton steigend.
- Es seien (X, \leq) und (Y, \trianglelefteq) totalgeordnete Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine streng monoton steigende, bijektive Funktion, dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$ streng monoton steigend.

Aufgabe 10: Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a)
$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Ist $x \neq 1$, dann ist
$$\sum_{k=1}^n \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

Aufgabe 11: Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \dots, x_n > 0$ gegeben. Zeige:

a)
$$(1+x_1)^2 \cdots (1+x_n)^2 > 1 + 2x_1 + \dots + 2x_n$$

b)
$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Aufgabe 12:

In einem Gefängnis hält ein Tyrann die besten 100 Mathematiker und Mathematikerinnen gefangen. Jeder von Ihnen hat ein Vogel auf die Stirn tätowiert bekommen und die einzige Möglichkeit aus dem Gefängnis zu entkommen, ist zu erraten welchen Vogel man auf der Stirn hat. Jeden Abend nach dem Essen, fragt der Tyrann, ob jemand raten möchte, doch bis jetzt hat sich niemand getraut. Denn wer falsch rät, wird geköpft und es ist quasi unmöglich zu erfahren welchen Vogel man auf der Stirn hat. Die Gefangenen dürfen nicht miteinander kommunizieren, es gibt keine Spiegel und auch sonst werden reflektive Oberflächen vermieden.

Ihr kommt als Journalist ans Gefängnis und stellt überrascht fest: Jeder Gefangene hat den gleichen Vogel auf der Stirn: Einen Schwan. Der Tyrann lacht über euer erstauntes Gesicht und stellt fest: "Jeder weiß von allen anderen, dass sie gehen dürften - nur von sich selbst weiß er es nicht."

Im Laufe des Tages entlockt ihr dem Tyrannen ein Gefallen und dürft vor versammelter Runde verkünden: Mindestens einer von euch hat auf der Stirn einen Schwan."

Wie kann diese scheinbar offensichtliche Information den Gefangenen helfen?

Hinweis: Es ist natürlich von Vorteil, dass die Gefangenen als Mathematiker rational und sehr gut im Lösen von Problemen sind.