Mathematisches Institut der Universität München 25.10.2023

Übungsblatt 2 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Es sei $\emptyset \neq I$ eine Menge und X_i sei für alle $i \in I$ eine Menge. Für $i, j \in I$ schreibe $X_i \sim X_j$ genau dann wenn es eine bijektive Abbildung $f : X_i \to X_j$ gibt. Zeige

a) $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\{X_i : i \in I\}$.

b) Ist jede der Mengen $X_i, i \in I$ eine endliche Menge, dann sind $X_i \sim X_j$ genau dann, wenn X_i und X_j gleich viele Elemente enthalten

c) Sind zu $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$X_n := \{1, 2, ..., n\}, Y_n := \{-n, ..., -2, -1\}, Z_n := \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n\}$$

gegeben, so bestimme die Äquivalenzklasse von Z_n bzgl. $\sim$.

Aufgabe 6: (10 Punkte) Betrachte die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x + 4 \end{array}$.

a) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} g :]-\infty, -1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ streng monoton fallend und $\begin{array}{rcl} h : [-1, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ streng monoton steigend ist.

b) Bestimme $f(\{3, -4\})$, $f^{-1}([1, 2])$, $h^{-1}([3, 7])$ und $f^{-1}([3, 7])$.

Aufgabe 7: (10 Punkte) Gib für $\begin{array}{rcl} f : [0, \infty[& \to & [0, 1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$ explizit die Umkehrfunktion an.
Zeige, daß f bijektiv und streng monoton steigend ist. Bestimme $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.

Aufgabe 8: (10 Punkte) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeige, daß äquivalent sind:

a) f ist injektiv.

b) $f^{-1}(f(V)) = V$ für alle $V \subseteq X$.

c) Ist $I \neq \emptyset$ und für jedes $i \in I$ sei $X_i \subseteq X$, dann gilt:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Donnerstag 2.11.2023, 9.30 Uhr.