Mathematisches Institut der Universität München 17.01.2024

ÜB 12 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 45: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren diese Reihen (absolut).

(i) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k^2}(x-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2} \cdot x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (iii) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{2^k} \cdot (x+\pi)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 46: *(Komplexe fast Potenzreihen)*
Für welche $x \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen (absolut)?

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2-\frac{1}{k})^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{x^3+x}{2}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 47: (Konvergenzradius bei verschiedenen Entwicklungspunkten)
Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{2i+1\} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \frac{1}{2i+1-x}$. Die Abbildung lässt sich (für passende x) als Reihe auffassen.

a) Finden Sie eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty}(x-b)^k$ mit passendem $b \in \mathbb{C}$, die in ihrem Konvergenzradius mit der Funktion übereinstimmt.

b) Überprüfen Sie, dass auch $\frac{1}{2i+1}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{2i+1})^k$ mit $f(x)$ übereinstimmt, solange die Reihe konvergiert.

c) Zeichnen Sie den Konvergenzradius aus a) bzw. b) in ein passendes gemeinsames Koordinatensystem und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 48: (Netze bezüglich Teilbarkeit)

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ eine gerichtete Menge bzgl. $\mid$ ist,
wobei $q \mid n \iff \exists k \in \mathbb{N}$ mit $n = qk$.

b) Wir betrachten das Netz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ (bzgl. der Ordnung aus a)).
Zeigen Sie, dass a_n gegen 0 konvergiert.

c) Entscheiden Sie, ob das Netz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ summierbar ist (Mit Begründung).