ÜB 11 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 41: Untersuchen Sie die Reihen auf (absolute) Konvergenz.

(i) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. (ii) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. (iii) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+(-1)^k}{2(k+\frac{1}{k^k})^4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 42: *(Wurzelkriterium ist „genauer" als Quotientenkriterium)*

a) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \neq 0$ und $\limsup \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$. Beweisen Sie, dass dann auch $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$.

b) Untersuchen Sie Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k}$ mit Quotientenkriterium und dann mit Wurzelkriterium auf Konvergenz.

c) Interpretieren Sie ihre Ergebnisse aus a) und b).

Aufgabe 43: (Gradwanderung zwischen Konvergenz und Divergenz)

a) Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{j=1}^{2^k} \frac{1}{j} \leq 1 + k$.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 44: (Stärkere Version vom Quotientenkriterium)

a) Beweisen Sie, dass für alle $n > N \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\prod_{k=N}^{n} \frac{k-2}{k} = \frac{(N-2)(N-1)}{n(n-1)}$.

b) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k > 0$. Ferner existiere $N \in \mathbb{N}$, sodass für $k > N$ gilt, dass $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq (1-\frac{2}{k})$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall absolut konvergiert.

c) Geben Sie eine Reihe an, deren Konvergenzverhalten nicht mit dem Quotientenkriterium bestimmt werden kann, die aber nach b) konvergiert.