Übungsblatt 10 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 37: Beweisen Sie, die Aussagen für konvergente Folgen in $\widehat{\mathbb{R}}$

(i) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

(ii) Wenn $a_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

(iii) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Aufgabe 38: (Zerlegung einer Folge)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Weiter seien $a_{n_k^{(1)}}, \ldots, a_{n_k^{(m)}}$ konvergente Teilfolgen, sodass

$$\bigcup_{i=1}^{m} \{n_k^{(i)} \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\{\lim_{k\to\infty} a_{n_k^{(i)}} \mid i = 1, \ldots, m\} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Aufgabe 39: Welche der folgenden Aussagen sind wahr/falsch. Begründen sie jeweils ihre Antwort.

a) Eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat.

b) Eine beschränkte Folge in $\mathbb{Q}$ ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat.

c) Wenn es für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ein $q \in [0, 1[$ gibt, sodass $|a_n - a_{n+1}| < q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Folge in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 40: (Weihnachtsaufgabe)
Genießt eure Ferien und erholt euch ein bisschen. Falls ihr Weihnachten feiert, ein frohes Fest und - so oder so - eine schöne Zeit mit Freunden, Familie oder euren Haustieren. Außerdem einen guten Rutsch!