Tutorium 7 zu Mehrdimensionaler Analysis

Aufgabe 1:
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \widehat{\mathbb{R}}$ sei $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})-$meßbar, $a \in X$ mit $\{a\} \in \mathcal{A}$ und δ_a das Diracmaß in a. Zeige, daß f genau dann δ_a-integrierbar ist, wenn $f(a) \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2:
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty[\to [0, \infty[$ eine monoton fallende Funktion. Zeige:

a) f ist $\mathcal{B}([a, \infty[) - \mathcal{B}([0, \infty[)-$meßbar.

b) Ist $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borel-Lebesguemaß, so ist f genau dann auf $[a, \infty[$ $\lambda-$integrierbar, wenn die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} f(k+a) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+a) \leq \int_{[a,\infty[} f d\lambda \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k+a).$$