Tutorium 4 zu Mehrdimensionaler Analysis

Aufgabe 1:
Es seien $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ und $(Z,\mathcal{C})$ Meßräume, $f : X \to Y$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$meßbar, $g : Y \to Z$ $\mathcal{B}-\mathcal{C}-$meßbar. Zeige, daß die Komposition $g \circ f : X \to Z$ $\mathcal{A}-\mathcal{C}-$meßbar ist.

Aufgabe 2:

Es sei $(X,\mathcal{A})$ ein Meßraum, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} : X \to \mathbb{R}^d$ sei $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)-$meßbar. Zeige:

a) $\begin{array}{rcl} \|f\| : X & \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & \|f(x)\| \end{array}$ ist $\mathcal{A}-\mathcal{B}([0,\infty[)-$meßbar.

b) Die Funktionen $f_1,...,f_d$ sind $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})-$meßbar.

c) $\begin{array}{rcl} f_1 \cdots f_d : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_1(x)\cdots f_d(x) \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} f_1 + ... + f_d : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_1(x) + ... + f_d(x) \end{array}$ sind $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})-$meßbar.

Aufgabe 3:
Es seien $(X,\mathcal{A})$ und $(Y,\mathcal{B})$ Meßräume, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit einer Folge paarweise disjunkter $A_n \in \mathcal{A}$. Ferner sei $(f_n : A_n \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen und $f : X \to Y$ definiert durch $f(x) = f_n(x)$, falls $x \in A_n$ ist. Zeige die Äquivalenz von

a) f ist $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$meßbar.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n $(\mathcal{A} \cap A_n) - \mathcal{B}-$meßbar.