Übungsblatt 7 zu Mathematik I (Physik)

Aufgabe 25: (10 Punkte)
Entscheide, ob für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Minimum, Infimum, Supremum oder Maximum existiert und gib diese gegebenfalls an:

a) $X := \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n - \frac{1}{n}, n^2\right]\right) \cup \left\{-\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

b) $Y := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[1 + \frac{1}{4^n}, 2 - \frac{1}{2^n}\right]$

c) $Z := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{3}{2^n}, \frac{1}{n^2}\right]$

Aufgabe 26: (10 Punkte)

a) Es sei $\emptyset \neq I$ eine beliebige Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $\emptyset \neq A_i \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge . Zeige: $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $B := \{\sup(A_i) : i \in I\}$ nach oben beschränkt ist. In diesem Fall gilt:

$$\sup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}$$

b) Sei $\emptyset \neq I, J$ Mengen $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und $f(I \times J)$ nach oben beschränkt. Zeige:

$$\sup\Big\{\sup\{f(i,j) : i \in I\} : j \in J\Big\} = \sup\Big\{\sup\{f(i,j) : j \in J\} : i \in I\Big\}$$

Aufgabe 27: (10 Punkte)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeige: $f(A)$ ist nach oben beschränkt und

$$\sup(f(A)) \leq f(\sup(A)) \tag{1}$$

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeige: $f(A)$ ist nach unten beschränkt und

$$\inf(f(A)) \geq f(\sup(A)) \tag{2}$$

c) Gib zwei Beispiele an, bei denen in (1) bzw. (2) keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 28: (10 Punkte) Skizziere die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

a) $U := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\,(z)| \leq 2, 0 < \mathrm{Re}\,(z) \leq 1, \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z) > 1\}$

b) $V := \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} \leq 1, \mathrm{Im}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z)\}$

c) $W := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \setminus \{iy : y \in]0,1]\}$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 8.12.2022, 10 Uhr – über Uni2work.