

Übungsblatt 6 zu Mathematik I (Physik)

Aufgabe 21: (10 Punkte)

Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei \bar{k} die Äquivalenzklasse von k in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Löse in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die folgenden Gleichungen:

- a) $\bar{3}X = \bar{4}$
- b) $X^2 = \bar{3}$
- c) $\bar{2}X^2 = \bar{1}$
- d) $X^6 = \bar{3}$
- e) $X^{124} + X^2 = \bar{6}$

Wir betrachten

$$\mathbb{Q}[X] := \left\{ p = \sum_{k=0}^n a_k X^k : n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \right\},$$

wobei Elemente $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ und $q = \sum_{l=0}^m b_l X^l \in \mathbb{Q}[X]$ genau dann gleich sind, wenn $m = n$ und $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ sind.

Aufgabe 22: (10 Punkte)

- a) Zeige, daß

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \oplus \left(\sum_{l=0}^m b_l X^l \right) := \sum_{j=0}^{\max\{m,n\}} (a_j + b_j) X^j$$

(wobei $a_{n+1} = \dots = a_m = 0$ für $n < m$ bzw. $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$ für $m < n$ verwendet wird) und

$$\lambda \bullet \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) := \left(\sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k \right)$$

zwei Abbildungen $\oplus : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$ und $\bullet : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$ definieren, die $(\mathbb{Q}[X], \oplus, \bullet)$ zu einem \mathbb{Q} -Vektorraum machen.

- b) Entscheide, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von $\mathbb{Q}[X]$ sind:

$$U_1 := \left\{ \sum_{k=0}^{11} a_k X^k : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_+ \right\}, U_2 := \{ a_0 + a_2 X^2 : a_0, a_2 \in \mathbb{Q} \}$$

- c) Bestimme

$$\text{lin}(\{nX^{2n} : n \in \mathbb{N}\}) \cap \text{lin}(\{X^{3n} : n \in \mathbb{N}\})$$

Aufgabe 23: (10 Punkte)

- a) Zeige, daß

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) * \left(\sum_{l=0}^m b_l X^l \right) := \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{k=0,1,\dots,n \\ l=0,1,\dots,m, k+l=j}} a_k b_l \right) X^j$$

eine Abbildung $*$: $\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$ definiert, die $(\mathbb{Q}[X], \oplus, *)$ zu einem kommutativen Ring mit Eins macht.

b) Zeige am Beispiel $p = 1 + X$ die Kürzungsregel $q_1 * p = q_2 * p \Rightarrow q_1 = q_2$ in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 24: (10 Punkte)

a) Zeige: Für $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})$ wird durch

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 * q_2 = q_1 * p_2$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})$ definiert.

b) Schreibe $\frac{p}{q} := [(p, q)]_{\sim}$ für die Äquivalenzklasse von $(p, q) \in \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})$ in $K := \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}) / \sim$. Zeige: Durch

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{p * s \oplus r * q}{q * s} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p * r}{q * s}$$

werden zwei Abbildungen $+$: $K \times K \rightarrow K$ und \cdot : $K \times K \rightarrow K$ definiert, die $(K, +, \cdot)$ zu einem Körper machen

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 1.12.2022, 10 Uhr – über Uni2work.