

## Übungsblatt 6 zu Mathematik I (Physik)

**Aufgabe 21: (10 Punkte)**

Zu  $k \in \mathbb{Z}$  sei  $\bar{k}$  die Äquivalenzklasse von  $k$  in  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . Löse in  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  die folgenden Gleichungen:

- a)  $\bar{3}X = \bar{4}$
- b)  $X^2 = \bar{3}$
- c)  $\bar{2}X^2 = \bar{1}$
- d)  $X^6 = \bar{3}$
- e)  $X^{124} + X^2 = \bar{6}$

Wir betrachten

$$\mathbb{Q}[X] := \left\{ p = \sum_{k=0}^n a_k X^k : n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \right\},$$

wobei Elemente  $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$  und  $q = \sum_{l=0}^m b_l X^l \in \mathbb{Q}[X]$  genau dann gleich sind, wenn  $m = n$  und  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$  sind.

**Aufgabe 22: (10 Punkte)**

- a) Zeige, daß

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \oplus \left( \sum_{l=0}^m b_l X^l \right) := \sum_{j=0}^{\max\{m,n\}} (a_j + b_j) X^j$$

(wobei  $a_{n+1} = \dots = a_m = 0$  für  $n < m$  bzw.  $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$  für  $m < n$  verwendet wird) und

$$\lambda \bullet \left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) := \left( \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k \right)$$

zwei Abbildungen  $\oplus : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$  und  $\bullet : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$  definieren, die  $(\mathbb{Q}[X], \oplus, \bullet)$  zu einem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum machen.

- b) Entscheide, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von  $\mathbb{Q}[X]$  sind:

$$U_1 := \left\{ \sum_{k=0}^{11} a_k X^k : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_+ \right\}, U_2 := \{ a_0 + a_2 X^2 : a_0, a_2 \in \mathbb{Q} \}$$

- c) Bestimme

$$\text{lin}(\{nX^{2n} : n \in \mathbb{N}\}) \cap \text{lin}(\{X^{3n} : n \in \mathbb{N}\})$$

**Aufgabe 23: (10 Punkte)**

- a) Zeige, daß

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) * \left( \sum_{l=0}^m b_l X^l \right) := \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{\substack{k=0,1,\dots,n \\ l=0,1,\dots,m, k+l=j}} a_k b_l \right) X^j$$

eine Abbildung  $*$  :  $\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$  definiert, die  $(\mathbb{Q}[X], \oplus, *)$  zu einem kommutativen Ring mit Eins macht.

b) Zeige am Beispiel  $p = 1 + X$  die Kürzungsregel  $q_1 * p = q_2 * p \Rightarrow q_1 = q_2$  in  $\mathbb{Q}[X]$ .

**Aufgabe 24: (10 Punkte)**

a) Zeige: Für  $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})$  wird durch

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 * q_2 = q_1 * p_2$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})$  definiert.

b) Schreibe  $\frac{p}{q} := [(p, q)]_{\sim}$  für die Äquivalenzklasse von  $(p, q) \in \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})$  in  $K := \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}) / \sim$ . Zeige: Durch

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{p * s \oplus r * q}{q * s} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p * r}{q * s}$$

werden zwei Abbildungen  $+$  :  $K \times K \rightarrow K$  und  $\cdot$  :  $K \times K \rightarrow K$  definiert, die  $(K, +, \cdot)$  zu einem Körper machen

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 1.12.2022, 10 Uhr – über Uni2work.**