

Übungsblatt 5 zu Mathematik I (Physik)**Aufgabe 17: (10 Punkte)**

a) Zeige, daß $] - 1, 1[$ versehen mit

$$\begin{aligned} * :] - 1, 1[\times] - 1, 1[&\rightarrow] - 1, 1[\\ (x, y) &\mapsto \frac{x + y}{1 + xy} \end{aligned}$$

eine Gruppe $(] - 1, 1[, *)$ bildet.

b) Bestimme in $(] - 1, 1[, *)$ die Lösungen von

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{1}{10} * x &= \frac{3}{10} \\ \text{(ii)} \quad -\frac{1}{2} * x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 18: (10 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, daß es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(z) = mz$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 19: (10 Punkte)

Es seien $X, Y \neq \emptyset$ Mengen mit $\text{Kard}(X) = \text{Kard}(Y)$ und es sei

$$\mathcal{S}(X) := \{f : X \rightarrow X : f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Zeige, daß es einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ gibt.

Aufgabe 20: (10 Punkte)

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Für $g, h \in G$ schreibe $g \sim h$ genau dann, wenn $h * g^{-1} \in U$. Zeige:

- \sim ist eine Äquivalenzrelation auf G .
- Für alle $g \in G$ gilt: Aus $h \sim j$ folgt $h * g \sim j * g$.
- $Ug := \{u * g : u \in U\}$ ist die Äquivalenzklasse $[g]_{\sim}$ von g bzgl. \sim .

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 24.11.2022, 10 Uhr – über Uni2work.