Übungsblatt 4 zu Mathematik I (Physik)

Aufgabe 13: (10 Punkte) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

a) Es seien $x_1, ..., x_n > 0$, dann ist

$$(x_1 + ... + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

b) Es seien $x_1, ..., x_n \geq 0$, dann ist

$$(1 + x_1) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + ... + x_n.$$

c) Es seien $x_1, ..., x_n \in [0, 1]$, dann ist

$$(1 - x_1) \cdots (1 - x_n) \geq 1 - x_1 ... - x_n.$$

Aufgabe 14: (10 Punkte)
Es sei $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$ eine endliche Menge mit n Elementen. Zeige, daß

$$Y_n = \{(Z_1, Z_2) \in \mathcal{P}(X_n) \times \mathcal{P}(X_n) : Z_1 \cap Z_2 = \emptyset\}$$

genau 3^n Elemente besitzt.

Aufgabe 15: (10 Punkte)

a) Es seien X, Y Mengen mit $X \cap Y = \emptyset$; zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{P}(X \cup Y) & \to & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & ((A \cap X), (A \cap Y)) \end{array}$$

bijektiv ist.

b) Zeige, daß es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt eine $k-$elementige Teilmenge aus einer $n-$elementigen Menge zu wählen.

c) Zeige: Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ gilt:

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \cdot \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \cdot \binom{n}{k-1} + ... + \binom{m}{k-1} \cdot \binom{n}{1} + \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0}$$

Aufgabe 16: (10 Punkte)
Für eine Menge M sei $\mathcal{E}(M) := \{U \subseteq M : U \text{ endlich } \}$. Zeige:

a) Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, dann hat $\mathcal{E}(M)$ genau 2^n Elemente.

b) Ist M eine unendliche Menge, dann sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Mengen M und M^n gleichmächtig.

c) Ist M eine unendliche Menge, dann sind M und $\mathcal{E}(M)$ gleichmächtig.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 17.11.2022, 10 Uhr – über Uni2work.