Mathematisches Institut der Universität München 2.12.2022

Übungsblatt 7 zu Mehrdimensionaler Analysis

Aufgabe 120: (10 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei $\lambda-$integrierbar. Betrachte die Funktionenfolgen $(g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & , \text{ falls } x > 0 \end{cases} ,$$
$$g_n(x) := g(nx) ,$$
$$h_n(x) := g_n(x - a)\ g_n(-(x - b))$$

Zeige, daß $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funtionen ist und berechne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \,\mathrm{d}\lambda \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f h_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

Aufgabe 121: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mu-$integrierbaren Funktionen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| d\mu < \infty.$$

Zeige, daß es ein $\mu-$integrierbares $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$ gibt, so daß

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

gilt.

Aufgabe 122 (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ die Vervollständigung, ferner sei $f : X \to \mathbb{C}$ $\mu-$integrierbar. Zeige, daß f dann auch $\widetilde{\mu}-$integrierbar ist.

Aufgabe 123: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mu-$integrierbar. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} n \int\limits_X \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Freitag 9.12.2022, 8.30 Uhr – über Uni2work