Mathematisches Institut der Universität München 24.11.2022

Übungsblatt 6 zu Mehrdimensionaler Analysis

Aufgabe 116: (10 Punkte)

a) Zeige, daß für $\lambda > 0$ durch

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & [0,\infty[\\ A & \mapsto & \mu(A) := \sum\limits_{k \in A} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{array}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiert wird.

b) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \end{array}$ eine nichtnegative $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \mathcal{B}([0,\infty[)$−meßbare Funktion definiert.

c) Berechne $\int\limits_{\mathbb{N}} f d\mu$.

Aufgabe 117 (10 Punkte)
Es sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Borel-Lebesguemaß und $f : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$−$\mathcal{B}([0,\infty[)$−meßbar und es gebe ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a + x) = f(a - x)$ für alle $x > 0$. Zeige

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda = 2 \int\limits_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_{]a,\infty[} d\lambda.$$

Aufgabe 118: (10 Punkte)

a) Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x+1)^2 + 4 \end{array}$. Zeige, daß f_+ eine $\mathcal{B}(\mathbb{R})$−$\mathcal{B}([0,\infty[)$−meßbare Funktion ist.

b) Es sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Borel-Lebesguemaß. Berechne $\int\limits_{\mathbb{R}} f_+ d\lambda$.

Aufgabe 119: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$−meßbar. Zeige, daß $\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{A} & \to & [0,\infty] \\ A & \mapsto & \int\limits_X f \mathbf{1}_A d\mu \end{array}$ ein Maß definiert.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Freitag 2.12.2022, 8.30 Uhr – über Uni2work