# Übungsblatt 5 zu Mehrdimensionaler Analysis

**Aufgabe 112: (10 Punkte)**
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, daß

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathcal{P}(X) &\to [0, \infty] \\ Q &\mapsto \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, Q \subseteq A\} \end{aligned}$$

ein äußeres Maß auf $X$ definiert.

**Aufgabe 113: (10 Punkte)**

a) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \widehat{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \operatorname{sign}(x)|x|^{3n} \end{aligned}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}})-$meßbar.

b) Zeige: $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \widehat{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}})-$meßbar.

c) Es sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borel-Lebesguemaß. Bestimme explizit das Bildmaß $\lambda \circ f^{-1}$.

**Aufgabe 114 (10 Punkte)**
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_1) < \infty, ..., \mu(A_n) < \infty$. Zeige, daß

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{j_l}\right)$$

gilt.

**Aufgabe 115: (10 Punkte)**
Es sei $\mathcal{E} = \{\{1, 2, ..., 2k\} : k \in \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{N}$.

a) Zeige:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\to [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(A) := \sup\left\{\sum_{j\in H} [(j-10)_+]^2 : H \subseteq A, H \text{ endlich}\right\} \end{aligned}$$

ist ein $\sigma-$endliches, aber kein endliches Maß.

b) Es sei $\begin{aligned} \mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\to [0, \infty] \\ B &\mapsto \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, B \subseteq A\} \end{aligned}$ das zu $\mu$ gehörige äußere Maß. Berechne $\mu^*(\{2k-1\})$ und $\mu^*(\{2k\})$ für jedes $k \in N$.

c) Bestimme die Nullmengen $\mathcal{N} := \{Y \subseteq \mathbb{N} : \mu^*(Y) = 0\}$ von $\mu$ und die Vervollständigung von $\mu$.

**Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.**
**Abgabe bis Freitag 25.11.2022, 8.30 Uhr – über Uni2work**