Mathematisches Institut der Universität München 10.11.2022

Übungsblatt 4 zu Mehrdimensionaler Analysis

Aufgabe 108: (10 Punkte)
Es sei $\mathcal{E} = \{\{1, 2, ..., 2k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma-$Algebra wie in Aufgabe 105. Zeige, daß durch

$$\mu(A) := \sum_{j \in A} \frac{1}{j(j+1)}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mu(A) \end{array}$ definiert wird.

Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge, dann heißt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine **Mengenalgebra**, wenn

a) $\emptyset, X \in \mathcal{R}$

b) Für jedes $A \in \mathcal{R}$ ist $X \backslash A \in \mathcal{R}$.

c) Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

gilt.

Aufgabe 109: (10 Punkte)

a) Zeige: $\mathcal{R} := \{A \subseteq \mathbb{Z} : A \text{ ist endlich oder } \mathbb{Z} \backslash A \text{ ist endlich}\}$ ist eine Mengenalgebra auf $\mathbb{Z}$.

b) Bestimme die von $\mathcal{R}$ erzeugte $\sigma-$Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ auf $\mathbb{Z}$.

c) Zeige: $\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{R} & \to & [0, \infty[\\ A & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{falls } \mathbb{Z} \backslash A \text{ endlich} \end{cases} \end{array}$ ist ein Inhalt.

d) Zeige: ν läßt sich nicht zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen.

Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt ein **Mengenring**, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{R}$
- Für jedes $A, B \in \mathcal{R}$, $A \supseteq B$ ist $A \backslash B \in \mathcal{R}$.
- Zu $A, B \in \mathcal{R}$ ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

Aufgabe 110 (10 Punkte)
Zeige:

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{N}]a_k, b_k] : N \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k \leq b_k \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ist ein Mengenring auf $\mathbb{R}$.

Es sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring auf X. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Für je endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, ..., A_N \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) \tag{1}$$

heißt ein **Inhalt**. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Für jede Folge von paarweise disjunkten Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$, die noch zusätzlich $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ erfüllt, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \tag{2}$$

heißt ein **Prämaß**.

Aufgabe 111: (10 Punkte)
Es existiert genau ein Inhalt μ auf $\mathcal{F}$, so daß

$$\mu(]a, b]) = b - a \tag{3}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ erfüllt ist. Für diesen dadurch eindeutig bestimmten Inhalt μ gilt:

- $\mu(B) \in [0, \infty[$ für jedes $B \in \mathcal{F}$.
- μ ist ein Prämaß auf $\mathcal{F}$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Freitag 18.11.2022, 8.30 Uhr – über Uni2work