Übungsblatt 1 zu Mehrdimensionale Analysis

Aufgabe 96: (10 Punkte)
Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

beliebig oft differenzierbar mit $f^{(k)}(0) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 97: (20 Punkte)
Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt $f : U \to \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitzstetig, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Umgebung V von x und ein $L_V \in [0, \infty[$ mit $\|f(y) - f(z)\| \le L_V \|y - z\|$ für alle $y, z \in V$ gibt. Zeige:

a) Diese Definition hängt nicht von den verwendeten Normen (auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$) ab.

b) Daß jede lokal Lipschitzstetige Funktion auch stetig ist.

c) Daß die Komposition von lokal Lipschitzstetigen Funktionen wieder lokal Lipschitzstetig ist.

d) Im Fall von $U \subseteq \mathbb{R}$ jede stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitzstetig ist.

e) $\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$ Lipschitzstetig (mit Lipschitzkonstante 1) ist.

Aufgabe 98: (10 Punkte)
Zeige, daß $\begin{aligned} f :]-1, 1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \end{aligned}$ lokal Lipschitzstetig aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 99: (10 Punkte)

a) Zeige, daß der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \tan(x)}{x - \sin(x)}$ existiert und berechne diesen.

b) Zeige, daß für $x > 0$ gilt:

$$\ln(1 + x) < x.$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Freitag 28.10.2022, 10 Uhr – über Uni2work