Tutoriumsblatt 7 zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 1

a) Untersuche, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ lineare Unterräume sind:

i) $V_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + 4x_4 = 0,\, x_1 + x_2 = 0\}$,

ii) $V_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2022\}$,

iii) $V_3 := V_3^+ \cup V_3^-$, wobei $V_3^+ := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$ und $V_3^- := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$.

b) Untersuche, ob $U := \{(x, y) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \mid y^2 = x(x + \bar{1})(x + \bar{2})\}$ ein linearer Unterraum von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ist.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien ferner $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass $U_1 \cup U_2 \subseteq V$ ein Untervektorraum genau dann ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 3

Es sei K ein geordneter Körper, $a, b \in K$ mit $0 < a$ und $0 < b$. Zeige:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \leq \frac{1}{2}(a + b).$$