Tutoriumsblatt 3 zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 1: Zeige:

a) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) 6 ist ein Teiler von $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

c) $2^n < n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

d) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$

Aufgabe 2: Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $2^n \leq n!$

b) $3^n \leq (n+1)!$

c) $n! \leq n^{n-1}$

Aufgabe 3:
Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ wird $n!$ rekursiv definiert durch: $0! := 1$, $1! := 1$ und $(n+1)! := (n+1) \cdot (n!)$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ definiere

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

c) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$$