Tutorium 4 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1:
Wir wollen zeigen, dass alle Pferde der Welt die gleiche Farbe haben, indem wir die Aussage $A(n) =$ „Je n Pferde haben die gleiche Farbe“ mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ nachweisen:

(i) Der Induktionsanfang für ein Pferd ist klar.

(ii) Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ seien $n+1$ Pferde auf einer Wiese. Nun führen wir ein Pferd weg, die verbleibenden n Pferde haben nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Wir bringen das Pferd wieder auf die Wiese und entfernen ein anderes Pferd. Wieder haben die restlichen n Pferde die gleiche Farbe. Somit haben alle $n+1$ Pferde die gleiche Farbe.

Wo liegt der Fehler?

Aufgabe 2: Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Aufgabe 3: Es sei X eine abzählbare Menge. Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist X^n abzählbar.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\mathcal{E}_n(X) := \{Y \subseteq X : \mathrm{Kard}(Y) \leq n\}$$

aller Teilmengen von X mit höchstens n Elementen abzählbar.

c) Die Menge

$$\mathcal{E}(X) := \{Y \subseteq X : Y \text{ ist endlich}\}$$

aller endlichen Teilmengen von X ist abzählbar.