Tutorium 3 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1:
Es sei $x \in [-1, \infty[$, zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt.

Aufgabe 2:

a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist 3 ein Teiler von $n^3 - n$.

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $2^n < n!$?

Aufgabe 3: Zeige die Kommutativität der Addition in $\mathbb{N}$ durch folgende Schritte: Es sei $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \backslash \{1\}$ die in den Peano-Axiomen beschriebene injektive Funktion („Nachfolger“). Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nach dem Rekursionssatz durch $\varphi_m(1) = m + 1 = N(m)$ und $\varphi_m \circ N = N \circ \varphi_m$ bestimmte Funktion. Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_1(n) = n + 1 = N(n)$.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_m \circ N = \varphi_{m+1}$.

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_m(n) = \varphi_n(m)$.

(Und da $m + n := \varphi_m(n)$ definiert ist, zeigt c) die Kommutativität der Addition auf $\mathbb{N}$.)