Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (F18T3A4)

a) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix (dh. $B^T = -B$). Zeigen Sie: $x^T Bx = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Seien $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetige Abbildungen, so daß $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv semidefinit und $B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ schiefsymmetrisch ist. Zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^T x \end{array}$ eine Lyapunov-Funktion zu

$$\dot{x} = -(A(x) + B(x))x$$

ist, dh. zeigen Sie $\dot{V}(x) \le 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= -x^2 y - 2y \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß der Ursprung eine stabile Ruhelage ist.

Aufgabe 26: (F20T1A2) Gegeben sei das autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2 - xy^2 \\ \dot{y} &= (x-2)y \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

b) Untersuchen Sie alle Ruhelagen auf asymptotische Stabilität.

c) Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[$. Begründen Sie, daß $y(t) > 0$ für alle $t \in J$ gilt.

Aufgabe 27: (H21T1A2)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 1\}$

(ii) $f(-2) > 0$, $f(0) > 0$ und $f(2) < 0$.

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), \qquad x(0) = \xi \tag{1}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$. Sie dürfen ohne begründung von der Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung von (1) ausgehen.

a) Bestimmen Sie alle $\xi \in \mathbb{R}$, für die die maximale Lösung von (1) streng monoton wächst und alle $\xi \in \mathbb{R}$, für die die Lösung von (1) streng monoton fällt. Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ enthält das Existenzintervall $I(\xi)$ der maximalen Lösung von (1) das Intervall $[0, \infty[$.

c) Zeigen Sie, daß $x = 1$ ein asymptotisch stabiler und $x = -1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist.