Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (H15T2A3)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

a) Wir betrachten die Picard-Iteration mit der Startfunktion $y_0(x) = 1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß die $n-$te Iterierte die Gestalt

$$y_n(x) = 1 + x + ... + x^n + x^{n+1} r_n(x)$$

besitzt, wobei r_n ein Polynom ist. Finden Sie damit eine Potenzreihe, die (1) löst.

b) In welchem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems (1). Auf welchem Intervall ist sie definiert?

Aufgabe 11: (H18T2A4)
Sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit $\langle f(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. (Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.) Man zeige:

a) Für jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist die Euklidische Norm $|\varphi(t)|$ konstant.

b) Jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung φ kann zu einer Lösung $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 12: (H16T1A3)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y) e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.