

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 7:** (H05T1A3)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- a)  $f$  stetig differenzierbar  $\Rightarrow$  (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- b)  $f$  stetig differenzierbar und  $x : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximal fortgesetzte Lösung von (1)  $\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow 1} |x(t)| = \infty$ .
- c) (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall  $] -\delta, \delta[$  mit  $\delta > 0 \Rightarrow f$  ist in einer Umgebung von 0 Lipschitz-stetig.
- c)  $f$  beschränkt und lokal Lipschitz-stetig  $\Rightarrow$  (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die Antwort ist durch Hinweis auf entsprechende allgemeine Aussagen oder Gegenbeispiel kurz zu begründen.

**Aufgabe 8:** (F08T3A4)

Man bestimme alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = 3(tx)^2 - 12t^2 \tag{2}$$

mit maximalem Definitionsbereich.

**Aufgabe 9:** (H03T2A4)

Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\sin(t+y)} - 1, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$