Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (H21T1A1)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$x''(t) = -4x'(t) - 5x(t) + \sin(t).$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob es unter diesen Lösungen solche gibt, die zudem den Bedingungen $x(0) = x(\pi) = 0$ genügen.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x^2 y'(x) = y(x)^2 + xy(x); \qquad y(-2) = 2.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, daß eine solche eindeutig bestimmte maximale Lösung existiert. Vergessen Sie nicht den Definitionsbereich I der maximalen Lösung anzugeben. Die Substitution $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ könnte hilfreich sein.

Aufgabe 5: (H04T1A2) Seien p und q stetige reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

a) Zeigen Sie, daß durch eine geeignete Transformation jeder positiven Lösung y der nichtlinearen Gleichung

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$$

eindeutig eine positive Lösung z der linearen Gleichung

$$z' + (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) = 0$$

zugeordnet werden kann.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertproblems

$$y' + y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ist die von Ihnen gefundene Lösung eindeutig?

Aufgabe 6: (F16T1A4)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß für jede Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

genau eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- x ist streng monoton wachsend
- x ist streng monoton fallend
- x ist konstant

b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur als stetig vorausgesetzt wird?