Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (H21T1A3) Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$$

betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{\sin(z)}$$

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f und deren Typ.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion auf Ω?

d) Bestimmen Sie $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, so daß die Funktion

$$F(z) := f(z) + c_1 \frac{1}{z - a_1} + c_2 \frac{1}{z - a_2}$$

auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 38: (H21T3A1) Es sei $\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 2e^{it} \end{array}$. Bestimmen Sie:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z) - 1}{z^2} dz$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z+i)^4} dz$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z} dz$

Hinweis zu c): Betrachten Sie die Reihenentwicklung des Integranden.

Aufgabe 39: (H21T3A4)
Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x \sin(x)}{x^2 + 1} \end{array}$.

a) Zeigen Sie, daß der Limes $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_0^R f(x)dx$ existiert. Begründen Sie, daß f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ mit Hilfe des Residuensatzes.

Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, daß die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.