Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (H16T1A1)

a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in U$ gelte $|f(z)| \leq |z - z_0|^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Zeigen Sie $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) = 0$.

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(z) := x^2 + \lambda y^2$ für $z = x + iy$. Bestimmen Sie alle λ, für die u Realteil einer ganzen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist. Geben Sie für diese λ alle zugehörigen ganzen Funktionen an.

Aufgabe 35: (H21T2A2)

a) Leiten Sie die Werte von $\sin(\frac{\pi}{3})$, $\cos(\frac{2\pi}{3})$ und $\sin(\frac{2\pi}{3})$ aus der Identität $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ab.

b) Geben Sie die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^4 + z^2 + 1$ in Polardarstellung an.

c) Sei N die Nullstellenmenge von p. Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten der Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash N & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^2 - z + 1}{p(z)} \end{array}$ und geben Sie im Falle eines Pols die Ordnung und das Residuum an.

d) Leiten Sie ausgehend vom Residuensatz eine Formel für das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ab. Begründen Sie hierbei auch, wieso das Integral existiert.

Aufgabe 36: (F10T3A5)

Für die Funktion $f(z) = \dfrac{2}{z(z^2+1)}$ bestimme man die Laurentreihen in den Bereichen

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\} \\ A_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 1\} \\ A_3 &:= \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - i| < 3\} \end{aligned}$$

und berechne längs $\begin{array}{rcl} \alpha : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}e^{it} \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \beta : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 4e^{4it} \end{array}$ die Wegintegrale $\displaystyle\int_\alpha f(z)dz$ und $\displaystyle\int_\beta f(z)dz$.