Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F10T2A1)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel

a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, dann ist f konstant.

b) Wenn $f(\frac{1}{n}) = \frac{i}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $f(z) = iz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wenn f eine nichtkonstante Polynomfunktion ist, dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\int\limits_\gamma f(z)dz = 2\pi i$.

d) Die Funktion $\frac{1}{f}$ hat in 0 keinen Pol.

e) Die Funktion $\begin{array}{rcl}]0,\infty[& \to & \mathbb{C} \\ r & \mapsto & \int\limits_{|z|=r} f(z)dz \end{array}$ ist konstant.

f) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(z-1)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 32: (F11T2A1)
Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, daß es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$.

b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Aufgabe 33: (H21T3A5)

a) Geben Sie eine auf $D := \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ holomorphe Funktion an, die der folgenden Eigenschaft genügt:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Begründen sie, daß es nur eine einzige Funktion gibt, die dieser Eigenschaft genügt.

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie: Falls $f : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist entweder f konstant 0 oder f hat bei a eine wesentliche Singularität.

c) Geben Sie nun zwei auf $\mathbb{C}\backslash\{-1, 0\}$ definierte holomorphe Funktionen an, die die in (a) genannte Eigenschaft erfüllen.