Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F09T3A3)
Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 2x - 4x^3$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) für diese Differentialgleichung.

c) Zeigen sie, daß alle maximalen Lösungen dieser Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

d) Skizzieren Sie das Phasenportrait für diese Differentialgleichung. Begründen Sie mit dessen Hilfe, welche der stationären Lösungen stabil, welche instabil sind. Besitzt die Differentialgleichung nicht konstante, periodische Lösungen?

Aufgabe 29: (H08T3A3) Betrachtet wird das ebene autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin(x) \end{aligned} \tag{1}$$

um den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$.

a) Finden Sie ein stetig differenzierbares $H = H(x, y)$, das auf den Lösungen des Systems (1) konstant ist.
Hinweis: Suchen Sie ein H mit $\dot{x} = H_y$ und $\dot{y} = -H_x$. Warum ist H dann konstant auf den Lösungen von (1).

b) Begründen Sie anschaulich, warum die Lösungskurven $(x(t), y(t))$ von (1) in der Nähe von $(0, 0)$ geschlossen sind.
Hinweis: Untersuchen Sie H auf Extrema

Aufgabe 21: (H21T2A3)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Für die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ darf ohne Begründung angenommen werden, daß zu jedem Anfangswert eine eindeutige maximale Lösung existiert. Für $x_0 \in D$ bezeichne $\varphi(\cdot, x_0)$ die maximale Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$.

a) Sei $0 \in D$ ein Fixpunkt der Differentialgleichung, der attraktiv ist (dh. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $x_0 \in D$ mit $\|x_0\| < \varepsilon$ die Aussage $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = 0$ gilt). Sei $x^* \in D$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, x^*) = 0$. Zeigen Sie: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, so gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so daß $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, x_k) = 0$ für alle $k \geq K$.

b) Zeigen Sie, daß die Behauptung aus (a) falsch wird, wenn man statt der Attraktivität von 0 nur voraussetzt, daß 0 ein Fixpunkt ist. Verwenden Sie hierzu das Beispiel

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$