# Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 1:** (F10T1A1) Geben Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}, \qquad y(0) = 1$$

eine zweiparametrige Schar von Lösungen an.

**Aufgabe 2:** (H21T3A2)

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = 3\sqrt{xt}, \qquad t, x \in ]0, \infty[.$$

Überprüfen Sie diese auf lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen mit Anfangswerten im offenen ersten Quadranten $]0, \infty[\times]0, \infty[$.

b) Zeigen Sie, daß die Eindeutigkeit der Lösungen nicht mehr gültig ist, sobald man den ersten Quadranten verläßt. Geben Sie dazu zwei verschiedene, auf $\mathbb{R}$ globale Lösungen für das Anfangswertproblem $x(0) = 0$ an.

**Aufgabe 3:** (H21T3A3)

a) Zeigen Sie, daß

$$(2t + 2) + 4x^3x' = 0 \tag{1}$$

eine exakte Differentialgleichung ist.

b) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(2t + 2) + 4x^3x' = 0, \qquad x(0) = 1. \tag{2}$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D$ Ihrer Lösung an.

c) Zeigen Sie, daß für jedes $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ und jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ von

$$(2t + 2) + 4x^3x' = 0, \qquad x(\tau) = \xi, \tag{3}$$

sowohl $I$ als auch $\lambda(I)$ beschränkt ist.