Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 22: (H12T1A1)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen verweisen Sie auf einen passenden Satz der Funktionentheorie , bei falschen geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

b) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Häufungspunkt und $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

c) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Häufungspunkt in G und $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

d) Ist f auf G beschränkt, so ist f konstant.

e) Ist $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

f) Ist $G = \mathbb{C}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 23: (F12T2A2)
Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $f(z) = -f(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw.

b) $\mathrm{Re}\,(g(z) = \sin(\mathrm{Im}\,(g(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $g(0) = 2\pi i$ bzw.

c) $h'(z) = z^2 h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 24: (H12T2A2)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, daß $|f(z)| \geq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, daß $f(z) = f(\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, daß $f(z + 1) = f(z) = f(z + i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 25: (F17T1A1)
Es sei f eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 3$ gilt, daß $|f'(z)| \leq 1 + e^{-|z|}$. Zeigen Sie, daß es $a, b \in \mathbb{C}$ gibt. so daß $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 26: (H12T1A5)
Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $|f(z) - z| < |z|$ auf dem Rand von D. Beweisen Sie, daß $|f'(\frac{1}{2})| \leq 8$ gilt und daß f in D genau eine Nullstelle hat.

Aufgabe 27: (F17T3A1)
Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom sowie $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral

$$\int\limits_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)}dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}$$

Aufgabe 28: (H10T2A2)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, daß dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muß.

Aufgabe 29: (H10T2A3)
Man bestimme die Laurent-Entwicklung von $f(z) := \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und in den Kreisringen $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$.

Aufgabe 30: (H15T1A2)

a) Existiert eine Folge von Punkten in der offenen oberen komplexen Halbebene, die alle Punkte von $\mathbb{R}$ und keine anderen Häufungswerte hat? Geben Sie eine ausführlich begründete Antwort.

b) Zeigen Sie, daß es eine Folge von Punkten in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe gibt, die genau die Punkte der komplexen Einheitskreislinie als Häufungswerte hat, und weisen Sie nach, daß diese Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

Aufgabe 31: (H11T2A3)

a) Sei h in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und sei eine meromorphe Funktion F durch $F(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ gegeben. Berechnen Sie das Residuum von F in z_0.

b) Klassifizieren Sie für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} \qquad \text{und} \qquad g(z) = \exp(\exp(-\frac{1}{z}))$$

alle isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$.

c) Berechnen Sie mit der Funktion f aus (b) das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Aufgabe 32: (F15T3A4) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

a) Es sei $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol 1. Ordnung in 0. Weiter seien $\alpha \in]0, 2\pi[$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma_\varepsilon : \begin{array}{ccc} [0,\alpha] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \varepsilon e^{it} \end{array}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(\xi)d\xi = i\alpha \mathrm{Res}(f, 0).$$

b) Die stetige Funktion $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $\mathbb{D}$. Ferner seien $m_1, m_2 \in]0, \infty[$, derart, daß für alle $\xi \in \partial\mathbb{D}$ gilt:

$$|f(\xi)| \leq m_1 \text{ für } \mathrm{Im}\,(\xi) \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |f(\xi)| \leq m_2 \text{ für } \mathrm{Im}\,(\xi) \leq 0.$$

Beweisen Sie, daß $|f(0)| \leq \sqrt{m_1 m_2}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z)f(-z)$.