Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 17: (H16T3A5)

a) Gegeben sei ein autonomes Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die $f(0) = 0$ erfüllt.

   (i) Definieren Sie den Begriff der asymptotischen Stabilität der stationären Lösung 0 des Systems.

   (ii) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der stationären Lösung 0 an, welches die totale Ableitung $Df(0)$ von f in 0 verwendet.

b) Prüfen Sie, ob die stationäre Lösung 0 des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 + \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= 2(1 - e^{x_1}) - 3x_2 + x_1 x_2^2 \end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 18: (H16T1A5)
Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + 2x^2 y - xy^2 \\ y' &= -2x^3 - y^3 + x^2 y + 2y^4 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

Aufgabe 19: (H19T3A5)

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und

$$\begin{aligned} p :]0,\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (r,\varphi) &\mapsto f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cos(\varphi) + g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q :]0,\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (r,\varphi) &\mapsto \tfrac{1}{r}(g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cos(\varphi) - f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to]0,\infty[\times\mathbb{R}$ eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} r' &= p(r,\varphi) \\ \varphi' &= q(r,\varphi) \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} \beta : I &\to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ t &\mapsto (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))) \end{aligned}$$

eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x' &= y + x^3 + xy^2 \\ y' &= -x + x^2 y + y^3 \\ (x(0), y(0)) &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 20: (F17T2A2) Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, daß die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

die Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} W : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\mapsto x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 \end{aligned}$$

besitzt. Zeigen Sie:

a) Alle maximalen Lösungen von (1) existieren auf ganz $\mathbb{R}$.

b) $\overline{x} := 0$ ist eine stabile, stationäre Lösung von (1).

c) Für jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von (1) ist $t \mapsto x_3(t)$ konstant.

d) Es gibt ein Vektorfeld f mit den obigen Eigenschaften, für welches zusätzlich die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\cot x = f(x), x(0) = (1, 0, 0)$ periodisch und nicht konstant ist.

Aufgabe 21: (H17T1A3)
Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= x^2 y + 3y =: f(x, y) \\ y' &= -xy^2 - 3x =: g(x, y). \end{aligned}$$

Man zeige:

a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.

b) Das System ist ein Hamiltonsches System, dh. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -g$ und $\dfrac{\partial H}{\partial y} = f$.

c) H ist konstant auf den Lösungen des Systems, dh. für jede Lösung φ gilt $H \circ \varphi$ ist konstant.

d) Jede Lösung φ ist beschränkt.

e) Jede maximale (dh. nicht fortsetzbare) Lösung φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

f) Die Nullösung ist stabil, aber nicht attraktiv.