Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 9: (H15T1A4)
Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige, matrixwertige Funktion. Betrachten Sie die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

a) Es seien $x_1(t), ..., x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$ Lösungen von (1). Ferner seien für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_0), ..., x_n(t_0)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß dann für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_1), ..., x_n(t_1)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Benutzen Sie das Superpositionsprinzip für lineare homogene Differentialgleichungen oder benutzen Sie die Differentialgleichung für Wronski-Determinanten.

b) Erklären Sie die Begriffe Fundamentalmatrix und Übergangsmatrix (auch Transitionsmatrix oder Hauptfundamentalmatrix genannt). Wie erhält man aus (a) eine Fundamentalmatrix und wie läßt sich die Lösung von (1) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ mithilfe der Übergangsmatrix ausdrücken?

c) Zeigen Sie: Sind $\Phi_1(t), \Phi_2(t), t \in \mathbb{R}$ Fundamentalmatrizen, so existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C, t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 10: (H08T2A1)
Bestimmen Sie die Lösung des linearen Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 8 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11: (F05T3A4) Mit reellen Zahlen a, b, c sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Geben Sie für jedes der beiden Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ und $y' = By$ eine Basis des Raumes der Lösungen an. Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konstanten a, b, c an, so daß Folgendes gilt:

a) Für alle Lösungen φ ist $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

b) Es gibt eine nicht-konstante periodische Lösung.

Aufgabe 12: (F09T2A2) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, daß die Ruhelage für das System $x' = Ax$ asymptotisch stabil ist.

b) Weiterhin sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig. Zeigen Sie, daß jede Lösung y der Gleichung $y' = Ay + b(t)$ asymptotisch stabil ist, indem Sie zeigen, daß für zwei Lösungen y und $\tilde{y}$ immer gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| = 0$$

Aufgabe 13: (H15T2A2)
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' = e^{2x}$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie mit einem geeigneten Ansatz eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie damit die allgemeine Lösung an.

c) Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Aufgabe 14: (F20T3A5)
Berechnen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = \sin(at).$$

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a jede Lösung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 15: (F18T1A4)

a) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, die folgende Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned} y_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2e^{3x} + \sin(3x) \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} y_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3e^{-2x} + \sin(3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-2x} + 5e^{3x} + \sin(3x) \end{aligned}$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y'(x) = \sin(ax) + a\cos(x)$$

mindestens eine unbeschränkte Lösung?