Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (F11T2A4) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$e^{-x}(x+y) - e^{-x}(y-x)y' = 0$$

a) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist oder ob wenigstens ein integrierender Faktor existiert.

b) Bestimmen Sie jeweils die maximal fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung, die der folgenden Anfangsbedingung genügt:

i) $y(1) = 0$

ii) $y(-1) = 1$

Aufgabe 2: (H13T2A4) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = t^2\sqrt{1+2y}$$

a) Geben Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert $y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, \infty[$ an. Warum ist sie dort eindeutig?

b) Betrachten Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{2}$. Geben Sie zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an.

Aufgabe 3: (F12T2A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x(x-2)e^{\cos(x)}, \quad x(0) = 1.$$

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Welche stationären Lösungen hat die Differentialgleichung?

b) Die maximale Lösung x aus (a) existiert auf ganz $\mathbb{R}$ und ist monoton fallend und beschränkt.

c) Die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$ existieren in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese Grenzwerte.

Aufgabe 4: (H10T3A3)
Sei

$$f(t,x) := \frac{t^2}{(e^x - x)^2}.$$

a) Zeigen Sie, daß $e^x \neq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, also daß f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \quad x(0) = 0$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung hat.

Aufgabe 5: (H12T1A3)

a) Sei g eine positive differenzierbare Funktion. Welche Stammfunktion hat dann $\frac{g'}{g}$?

b) Bestimmen Sie die Lösung $y = \varphi(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = -xy\ln(y), \quad y(0) = e$$

und deren maximalen Definitionsbereich. Zeigen Sie, daß die Lösung auf diesem Definitionsbereich der Abschätzung $1 \leq \varphi(x) \leq e$ genügt und skizzieren Sie den Graphen der Funktion φ.

Aufgabe 6: (F11T1A1)
Untersuchen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y-1|}$$

jeweils, ob es Lösungen mit den wie folgt vorgegebenen Werten gibt, und geben Sie im Falle der Existenz alle solchen Lösungen an:

a) $y(0) = 0$ und $y(1) = 2$

b) $y(0) = 0$ und $y(2) = 2$

c) $y(0) = 0$ und $y(3) = 2$

Aufgabe 7: (F11T3A2)
Sei $D := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + x^2 < 1\}$ und $\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \sqrt{1-t^2-x^2} \end{array}$. Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < 0 < b < \infty$.

b) Die Grenzwerte $\varphi(a) := \lim_{t \searrow a} \varphi(t)$ und $\varphi(b) := \lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$ exitieren in $\mathbb{R}$.

c) Es gilt $-a = b$, $b^2 + (\varphi(b))^2 = 1$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} < b < 1$.

Aufgabe 8: (F12T3A3) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für ein $p \in \Omega$ existiere eine Lösung $\gamma :]a,\infty[\to \Omega$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = p$. Man zeige, daß dann p eine Ruhelage sein muß, dh. $f(p) = 0$.