Übungsblatt 9 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 33: (10 Punkte)
Gib ein Beispiel einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die jede rationale Zahl ein Häufungswert ist und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ gilt.

Aufgabe 34: (10 Punkte) Zeige, daß die Reihen

a) $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{4k^2+8k+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

b) $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergieren und bestimme die Grenzwerte.

Aufgabe 35: (10 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{2a_n+3}$.

a) Zeige, daß $a_n \in]0,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $3 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt.

c) Es sei $b_n := 3 - a_n$; zeige, daß die Reihe $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ bis auf einen Fehler $\leq \frac{1}{100}$.

Aufgabe 36: (20 Punkte)
Untersuche die Reihen

a) $$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } x_k := \begin{cases} -\dfrac{k^3}{3^k} & \text{für ungerades } k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{k^4}{4^k} & \text{für gerades } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b) $$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

c) $$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{8^k}{\binom{2k}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf (absolute) Konvergenz. Wo sind Wurzelkriterium und Quotientenkriterium anwendbar?

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!
Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Donnerstag 13.1.2022, 10 Uhr – über Uni2work