Übungsblatt 8 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 29: (10 Punkte)
Bestimme alle Häufungswerte der Folge

$$z_n := \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{4}\right)^n.$$

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und es seien $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

a) Zeige, daß durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d &\to \mathbb{K} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \right) &\mapsto \sum_{j=1}^{d} \overline{\lambda_j x_j} \lambda_j y_j \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^d$ definiert wird.

b) Skizziere im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $d = 2$, $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ die „Einheitskugel“

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$$

für die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\| \cdot \|$.

Aufgabe 31: (10 Punkte)
Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k > 0$. Zeige, daß dann

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{a_k} = \sqrt{a}$$

gilt.

Aufgabe 32: (10 Punkte)
Zeige, daß die reellen Folgen

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n \sqrt[n]{1+n^{2n}}+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n \sqrt[n]{1+n^{2n}}+1}{n^4+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Limesinferior und Limessuperior existieren und bestimme diese.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 23.12.2021, 10 Uhr – diesmal nur über Uni2work