Übungsblatt 6 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 21: (10 Punkte)
Es sei K ein geordneter Körper, $x_1, ..., x_n \in K$ mit $x_1 > 0$,...,$x_n > 0$. Zeige:

a) Ist $x_1 + ... + x_n = n$, so ist $x_1 \cdots x_n \leq 1$.
Hinweis: Wieso kann man beim Induktionsschritt $n \to n+1$ oE. $x_n = \min\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ und $x_{n+1} = \max\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ voraussetzen und die Induktionsvoraussetzung auf $x_1, ..., x_{n-1}$ und $(x_n + x_{n+1} - 1)$ anwenden?

b)
$$\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots \frac{1}{x_n}}\right)^n \leq x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Aufgabe 22 (10 Punkte)

a) Es sei $\emptyset \neq I$ eine beliebige Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $\emptyset \neq A_i \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge . Zeige: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $B := \{\sup(A_i) : i \in I\}$ nach oben beschränkt ist. In diesem Fall gilt:
$$\sup\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}$$

b) Sei $\emptyset \neq I, J$ Mengen $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und $f(I \times J)$ nach oben beschränkt. Zeige:
$$\sup\Big\{\sup\{f(i,j) : i \in I\} : j \in J\Big\} = \sup\Big\{\sup\{f(i,j) : j \in J\} : i \in I\Big\}$$

Aufgabe 23: (10 Punkte)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeige: $f(A)$ ist nach oben beschränkt und
$$\sup(f(A)) \leq f(\sup(A)) \tag{2}$$

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeige: $f(A)$ ist nach unten beschränkt und
$$\inf(f(A)) \geq f(\sup(A)) \tag{3}$$

c) Gib zwei Beispiele an, bei denen in (2) bzw. (3) keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 24: (10 Punkte)
Entscheide, ob für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Minimum, Infimum, Supremum oder Maximum existiert und gib diese gegebenfalls an:

a) $X := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, 2^n] \right) \cup \{-\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

b) $Y := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [1 - \frac{1}{2^n}, 2 - \frac{1}{3^n}]$

c) $Z := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{2}{3^n}, \frac{1}{n^2}]$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 2.12.2021, 10 Uhr – diesmal nur über Uni2work