Übungsblatt 5 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 17: (10 Punkte) Es sei $(G,*)$ eine Gruppe, $I, J \neq \emptyset$ und für jedes $i \in I$ sei $h_i \in G$ und für jedes $j \in J$ sei mit $G_j \subseteq G$ eine Untergruppe von G gegeben. Zeige:

a) Der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} G_j$ ist eine Untergruppe von G.

b) Es gibt eine eindeutige kleinste Untergruppe $G(h_i : i \in I)$ von G, die alle Elemente der Menge $\{h_i : i \in I\}$ enthält. Für diese Untergruppe gilt:

$$G(h_i : i \in I) = \big\{b_1 * ... * b_n : n \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_n \in \{h_i, h_i^{-1} : i \in I\}\big\}.$$

Aufgabe 18 (10 Punkte)
Sei $(G,*)$ eine Gruppe und

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi : G \to G : \varphi \text{ ist bijektiver Gruppenhomomorphismus}\}$$

die Menge aller bijektiven Gruppenhomomorphismen von G in sich selbst. Sei außerdem durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \tau_g : G & \to & G \\ h & \mapsto & g * h * g^{-1} \end{array}$$

die Konjugation mit $g \in G$ definiert. Zeige, daß

a) $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ zusammen mit der Komposition von Funktionen eine Gruppe bildet.

b) die Menge der Konjugationen $\{\tau_g : g \in G\}$ mit der Komposition eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ bildet.

Aufgabe 19: (10 Punkte)
Es sei

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{ \frac{p + \sqrt{2}q}{r + \sqrt{2}s} : p, q, r, s \in \mathbb{Q}, (r, s) \neq (0, 0) \right\}$$

Zeige:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{u + \sqrt{2}v : u, v \in \mathbb{Q}\}$.

b) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ ist eine kommutative Gruppe.

c) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \backslash \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.

Aufgabe 20: (10 Punkte)
Löse in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die folgenden Gleichungen:

a) $2X = 3$

b) $X^2 = 3$

c) $2 = 4X^2$

d) $X^6 = 1$

e) $X^{2021} = 4$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 25.11.2018, 10 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock oder über Uni2work