

## Übungsblatt 3 zu Analysis und Lineare Algebra I

### Aufgabe 9: (15 Punkte)

a) Mit der Konvention  $x^0 := 1$  zeige: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

b) Zeige: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $3^{2n} + 7$  ohne Rest durch 8 teilbar.

c) Für welche  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $(n+1)^2 \leq 3^n$ ?

### Aufgabe 10: (10 Punkte)

Für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  nutzt man den Rekursionssatz um durch  $1! := 1$  und

$$(n+1)! := (n+1) \cdot n!$$

die Fakultät  $n!$  zu definieren. Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so heißt

$$\mathcal{S}_n := \{f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : f \text{ bijektiv}\}$$

die Menge der Permutationen von  $1, \dots, n$ .

a) Zeige, daß  $\mathcal{S}_n$  genau  $n!$  Elemente hat.

Man setzt ferner  $0! := 1$  und zu  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq n$  definiert man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Sprechweise: „ $k$  aus  $n$ “. Zeige:

b)  $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der  $k$  elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

### Aufgabe 11: (15 Punkte) Zeige:

a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

c) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

d) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

**Aufgabe 12: (10 Punkte)** Das gelangweilte Schneewittchen wollte sich neue Schuhe kaufen und benötigte dazu die modische Beratung der Zwerge. Da sich jedoch keiner der Zwerge für das Shoppen mit Schneewittchen begeistern konnte, schlug Schneewittchen ein Spiel vor, dessen Verlierer ihre Begleiter festlegen sollte. Dazu stellten sich die Zwerge im Kreis auf und bekamen von Schneewittchen, die von hinten an die Zwerge herantrat, eine entweder rote oder grüne Zwergenmütze aufgesetzt, so dass zwar jeder der Zwerge die Mützenfarbe der anderen Zwerge, nicht aber seine eigene sehen konnte. Danach gab Schneewittchen bekannt, dass es in der Runde Zwerge mit grünen Mützen gebe und dass die Zwerge im Folgenden einzeln und in Reihenfolge ihres Alters ihr Lieblingslied „Heigh-Ho“ singen würden. Vor oder nach jeder Runde des Liedes mussten alle Zwerge, die sich bis dahin klar geworden waren, die Frage nach der Farbe ihrer Mütze durch Heben des rechten oder linken Armes beantworten. Die Zwerge, die ihre Mützenfarbe korrekt nennen konnten durften zurück in die Mine gehen. Den Zwergen, die ihre Mützenfarbe falsch angaben, drohte das Shopping mit Schneewittchen. Schneewittchen musste sich schließlich ohne Begleitung neue Schuhe kaufen. Wie ist das zu erklären?

Anleitung: Man verwende die bekannte Tatsache, dass Zwerge absolut ausgefuchst sind und dies auch voneinander wissen.

**Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 11.11.2018, 10 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock oder über Uni2work**