Übungsblatt 13 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 49: (10 Punkte)
Es sei V ein $K-$Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K(U) = m$, W ein $K-$Vektorraum mit $\dim_K(W) = p$ und $Y \subseteq W$ ein Untervektorraum mit $\dim_K(W) = q$.

a) Unter welchen Bedingungen gibt es eine $K-$lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $\text{Kern}(F) = U$ und $F(V) = Y$.

b) Unter welchen Bedingungen gibt es eine injektive $K-$lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $\text{Kern}(F) = U$ und $F(V) = Y$.

c) Unter welchen Bedingungen gibt es eine surjektive $K-$lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $\text{Kern}(F) = U$ und $F(V) = Y$.

Aufgabe 50: (10 Punkte)

Es sei $Y := \{\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3\} \subseteq \mathbb{C}^5$ mit $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{y}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^5$. Zeige:

a) $U := \{\underline{v} \in \mathbb{C}^5 : \langle \underline{y}, \underline{v} \rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^5$.

b) $\dim_{\mathbb{C}}(U) = 2$.

Aufgabe 51: (10 Punkte)

Es seien $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

a) Bestimme alle $\mathbb{R}-$linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1$, $f(\underline{v}_2) = \underline{w}_2$ und $f(\underline{v}_3) = \underline{w}_3$ und gib die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ an.

b) Bestimme alle $\mathbb{R}-$linearen Abbildungen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $g(\underline{w}_1) = \underline{v}_1$, $g(\underline{w}_2) = \underline{v}_2$ und $g(\underline{w}_3) = \underline{v}_3$ und gib die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 52: (10 Punkte)

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.

b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch ihre darstellende Matrix

$$A = M_{\kappa_3}^{\kappa_3}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis κ_3 von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Berechne die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich $\mathcal{B}$.

c) Bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f \circ f)$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Donnerstag 10.2.2022, 10 Uhr – über Uni2work