Übungsblatt 12 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 45: (15 Punkte)
Zeige, daß

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-i \\ 3-2i \\ 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 3-3i \\ 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3$

linear unabhängige Mengen sind.

Aufgabe 46: (10 Punkte)
Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ a \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 47: (15 Punkte)
Zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ sei

$$V_n := \{f : \{-n, -n+1, ..., n-1, n\} \to \mathbb{C} : f \text{ ist eine Funktion}\}.$$

Zeige:

a) V_n ist ein $(2n+1)-$dimensionaler $\mathbb{C}-$Vektorraum.

b) $$G_n := \Big\{ f \in V_n : f(-k) = f(k) \text{ für alle } k \in \{-n, ..., n\} \Big\}$$

und

$$U_n := \Big\{ f \in V_n : f(-k) = -f(k) \text{ für alle } k \in \{-n, ..., n\} \Big\}$$

sind Untervektorräume von V_n.

c) $V_n = G_n + U_n$.

d) $V_n = G_n \oplus U_n$.

e) $\dim_{\mathbb{C}}(U_n) = n$ und $\dim_{\mathbb{C}}(G_n) = n+1$.

Aufgabe 48: (10 Punkte)
Es sei $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ und

$$V := \left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{a\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{h(z)}{(z-a)^2} \end{array} : h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ist eine Funktion} \right\}$$

und für $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{C}\backslash\{a\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{e^{naz}}{(z-a)^2} \end{aligned} .$$

Zeige:

a) $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq V$ ist linear unabhängig.

b) V ist kein endlichdimensionaler Vektorraum.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Donnerstag 3.2.2022, 10 Uhr – über Uni2work