

## Übungsblatt 11 zu Analysis und Lineare Algebra I

**Aufgabe 41: (10 Punkte)**

Für  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$  sei  $x_{(j,k)} := \begin{cases} \frac{1}{j^2 - k^2} & \text{für } j \neq k \\ 0 & \text{für } j = k \end{cases}$ . Zeige, daß die Familie  $(x_{(j,k)})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$  nicht summierbar ist.

**Aufgabe 42: (15 Punkte)**

Entwickle die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, i\} \rightarrow \mathbb{C}$  um die Entwicklungspunkte 0 und  $-i$  in eine Potenzreihe und bestimme den Konvergenzkreis dieser Potenzreihen.

$$z \mapsto \frac{z^2 + 5z + 4 - i}{(z + 2)^2(z - i)}$$
**Aufgabe 43: (10 Punkte)**

Es sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  mit Grenzwert  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .

- a) Zeige, daß die Folge  $(e^{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{z_n}$$

gilt.

- b) Zeige, daß die Folgen  $(\cos(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sin(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren und

$$\cos(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(z_n) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(z_n)$$

gilt.

**Aufgabe 44: (10 Punkte)**

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto e^x$$

- a) Zeige:  $f(x) = e^x > 1$  für alle  $x > 0$ ,  $f(x) < 1$  für alle  $x < 0$  und  $f$  ist streng monoton steigend.

- b) Es sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  in  $\widehat{\mathbb{R}}$ . Zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^k} = \infty \tag{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x_n} x_n^k = 0. \tag{2}$$

**Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 27.1.2022, 10 Uhr – über Uni2work**