

Übungsblatt 11 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 41: (10 Punkte)

Für $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ sei $x_{(j,k)} := \begin{cases} \frac{1}{j^2 - k^2} & \text{für } j \neq k \\ 0 & \text{für } j = k \end{cases}$. Zeige, daß die Familie $(x_{(j,k)})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$ nicht summierbar ist.

Aufgabe 42: (15 Punkte)

Entwickle die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, i\} \rightarrow \mathbb{C}$ um die Entwicklungspunkte 0 und $-i$ in eine Potenzreihe und bestimme den Konvergenzkreis dieser Potenzreihen.

$$z \mapsto \frac{z^2 + 5z + 4 - i}{(z + 2)^2(z - i)}$$
Aufgabe 43: (10 Punkte)

Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in \mathbb{C} mit Grenzwert $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

- a) Zeige, daß die Folge $(e^{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{z_n}$$

gilt.

- b) Zeige, daß die Folgen $(\cos(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sin(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren und

$$\cos(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(z_n) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(z_n)$$

gilt.

Aufgabe 44: (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto e^x$$

- a) Zeige: $f(x) = e^x > 1$ für alle $x > 0$, $f(x) < 1$ für alle $x < 0$ und f ist streng monoton steigend.

- b) Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ in $\widehat{\mathbb{R}}$. Zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^k} = \infty \tag{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x_n} x_n^k = 0. \tag{2}$$

**Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Donnerstag 27.1.2022, 10 Uhr – über Uni2work**