Mathematisches Institut der Universität München 21.10.2021

Übungsblatt 1 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1: (10 Punkte) Unter der Voraussetzung, daß es Töpfe und Deckel jeder Form und Größe gibt, untersuche die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Anschließend formuliere die Negation einer jeden Aussage.

a) Auf jeden Topf paßt ein Deckel.

b) Es gibt einen Topf, auf den alle Deckel passen.

c) Jeder Deckel paßt auf wenigstens einen Topf.

d) Es gibt einen Topf, auf den ein Deckel paßt.

e) Auf jeden Topf passen alle Deckel.

f) Es gibt einen Deckel, der auf alle Töpfe paßt.

Aufgabe 2: (10 Punkte) Es seien X und Y nichtleere disjunkte Mengen, also $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ und $X \cap Y = \emptyset$. Zeige daß

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) & \rightarrow & \mathcal{P}(X \cup Y) \times \mathcal{P}(X \cup Y) \\ (A, B) & \mapsto & (A \cup (Y \backslash B), (X \backslash A) \cup B) \end{array}$$

eine injektive, aber keine surjektive Abbildung ist.

Aufgabe 3: (10 Punkte): Es seien $X = \{\diamond, \bullet, \triangle, \bigtriangledown, \infty\}$ und $Y = \{\diamondsuit, \heartsuit, \maltese, \ast, \odot\}$

a) Es sei $X_1 := \{\diamond, \bullet, \infty\}$ und $g_1 : X_1 \rightarrow Y$ definiert durch $g_1(\diamond) = \ast$, $g_1(\bullet) = \ast$ und $g_1(\infty) = \diamondsuit$. Gibt es eine surjektive Funktion $f_1 : X \rightarrow Y$, die $f_1(x) = g_1(x)$ für alle $x \in X_1$ erfüllt? Wenn ja, so gib alle möglichen derartigen Funktionen an.

b) Es sei $X_2 = \{\triangle, \bigtriangledown, \bullet\}$ und $g_2 : X_2 \rightarrow Y$ definiert durch $g_2(\triangle) = \ast$, $g_2(\bigtriangledown) = \maltese$ und $g_2(\bullet) = \odot$. Gibt es eine injektive Funktion $f_2 : X \rightarrow Y$, die $f_2(x) = g_2(x)$ für alle $x \in X_2$ erfüllt? Wenn ja, so gib alle möglichen derartigen Funktionen an.

c) Es sei $X_3 = \{\bullet, \diamond, \infty\}$ und $g_3 : X_3 \rightarrow Y$ definiert durch $g_3(\bullet) = \maltese$, $g_3(\diamond) = \odot$ und $g_3(\infty) = \maltese$. Gibt es eine injektive Funktion $f_3 : X \rightarrow Y$, die $f_3(x) = g_3(x)$ für alle $x \in X_3$ erfüllt? Wenn ja, so gib alle möglichen derartigen Funktionen an.

d) Es sei $f_4 : X \rightarrow Y$ gegeben durch $f_4(\diamond) = \ast$, $f_4(\bullet) = \odot$, $f_4(\triangle) = \heartsuit$, $f_4(\bigtriangledown) = \odot$ und $f_4(\infty) = \ast$. Bestimme $f_4(X_1)$, $f_4(X_2)$, $f_4(\{\diamond, \infty\})$, $f_4^{-1}(\{\maltese, \diamondsuit\})$ und $f_4^{-1}(\{\ast\})$.

Aufgabe 4: (15 Punkte) Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Zeige, daß folgende Eigenschaften äquivalent sind:

a) f ist injektiv

b) Für $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{für } y \in Y \backslash f(X) \\ \{x\} & \text{für } y = f(x) \in f(X) \end{array} \right.$$

c) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: $f^{-1}(f(A)) = A$.

d) Für jedes Paar $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ von Teilmengen von X gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

e) Für jedes Paar $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

f) Für jedes Paar $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ mit $B \subseteq A$ gilt $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 28.10.2018, 10 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock oder über Uni2work