Priv.-Doz. Dr. Heribert Zenk
Leon Bollmann

Mathematik für Naturwissenschaftler 1

WiSe 2021/22

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: (15 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $\mathcal{S}_n$, aller Permutationen der Menge $\{1, ..., n\}$ (vergleiche Beispiel 2.2.3. der Vorlesung).

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{S}_n$ genau $n!$ verschiedene Elemente hat.

Folgen Sie dazu folgendem Beweisschema:

a) Zeigen Sie den Induktionsanfang für $n = 1$.

b) Schauen Sie sich die Definition in Beispiel 2.2.3. noch einmal genau an.
Überlegen Sie warum es für jede Möglichkeit, die Zahlen $1, 2, ..., n$ in unterschiedlicher Reihenfolge anzuordnen, genau eine Permutation in $\mathcal{S}_n$ gibt.
Folgern Sie, dass es hinreichend ist, für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage zu beweisen:

$A(n)$:= Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten die Zahlen $1, 2, ..., n$ in unterschiedlicher Reihenfolge anzuordnen.

c) Zeigen Sie den Induktionsschritt für die Aussage $A(n)$.
Hinweis: Um alle möglichen Anordnungen der Zahlen $1, 2, ..., n+1$ zu finden, beginnen Sie damit die erste Zahl in der Reihenfolge beliebig zu wählen. Wie viele Zahlen bleiben dann übrig? Können wir dann $A(n)$ anwenden? Wie viele Möglichkeiten gibt es die erste Zahl zu wählen?

Aufgabe 2: (15 Punkte) Rechnen Sie für den Körper $(\{0, 1, 2\}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

die folgenden Körpereigenschaften nach:

a) Für alle $a, b \in \{0, 1, 2\}$ gilt: $a + b = b + a$.

b) Für alle $a \in \{1, 2\}$ gibt es ein $b \in \{1, 2\}$, so dass $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

c) Für alle $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Anmerkung: Tippfehler bei Teil b).
Ursprünglich war der Wortlaut von Teil b) fälschlicherweise:
"Für alle $a \in \{0, 1, 2\}$ gibt es ein $b \in \{0, 1, 2\}$, so dass $a \cdot b = b \cdot a = 1$."

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 1.12.2021, 14 Uhr – über Uni2work!