Priv.-Doz. Dr. Heribert Zenk
Leon Bollmann

Mathematik für Naturwissenschaftler 1

WiSe 2021/22

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Beweisen Sie den zweiten Teil von **Lemma 1.1.9.** aus der Vorlesung:
Sind I, J Mengen und $X_i \subseteq X$ für $i \in I$ und $Y_j \subseteq Y$ für $j \in J$, dann gilt:

$$(\bigcap_{i \in I} X_i) \cup (\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{(i,j) \in IxJ} X_i \cup Y_j.$$

Aufgabe 2: (10 Punkte) Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:
Im folgenden seien $X := \{p \in \mathbb{R} : 0 \leq p \leq 4\}$, $Y := \{q \in \mathbb{R} : 0 \leq q \leq 8\}$,

a) Es sei
$$\Gamma_a := \{(p,p) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p \leq 3\},$$
$f_a = (X, Y, \Gamma_a)$ ist eine Funktion.

b) Es sei
$$\Gamma_b := \{(p,p) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p \leq 4\} \cup \{(p, 8-p) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p \leq 4\},$$
$f_b = (X, Y, \Gamma_b)$ ist eine Funktion.

c) Es sei
$$\Gamma_c := \{(p,p) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p < 2\} \cup \{(p+2, 4-p) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p \leq 2\},$$
$f_c = (X, Y, \Gamma_c)$ ist eine Funktion.

d) Sind $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ q & \mapsto & q^3 \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} k : \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ q & \mapsto & q+1 \end{array}$ so gilt $h(k(q)) = k(h(q))$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2 \end{array}$. Bestimmen Sie $f^{-1}([-1,1[)$, $f([-1,1[)$, $f^{-1}([0,2])$, $f^{-1}([2,3])$ und $f(]0,1[)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ m & \mapsto & m^3 \end{array}$ injektiv ist.

c) Ist die Funktion $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ m & \mapsto & m^3+3 \end{array}$ auch injektiv? Begründen Sie ihre Antwort.
Hinweis: Lemma 1.2.10. ist eine Möglichkeit.

d) Ist die Funktion $\begin{array}{rcl} i:\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ m & \mapsto & m^4 \end{array}$ injektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

e) Bestimmen Sie die Menge aller Paare $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$,
sodass die Funktion $\begin{array}{rcl} j:\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ m & \mapsto & m^n + z \end{array}$ injektiv ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 03.11.2021, 14 Uhr – vor der Übung, im Übungskasten (Theresienstraße 1. Stock) oder über Uni2work.