

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

### Aufgabe 25: (H20T3A2)

- a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} f(z) > 0$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
Hinweis: Überlegen Sie zunächst, warum die Singularität bei  $z = 0$  hebbar ist.
- b) Es sei  $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  der Hauptzweig des Logarithmus. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von  $\operatorname{Log}$  mit Entwicklungspunkt  $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ .

### Aufgabe 26: (H18T1A1)

- a) Bestimmen Sie die Menge  $K \subseteq \mathbb{R}$ , die genau diejenigen  $x \in \mathbb{R}$  enthält, für welche die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}$  gegen eine reelle Zahl konvergiert.
- b) Für  $a \in \mathbb{C}$  bezeichne  $\gamma_a : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$   
 $t \mapsto a + 2e^{it}$ . Bestimmen Sie den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz$$

für alle  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| \neq 2$ .

### Aufgabe 27: (F13T1A1)

- a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z) - 3| \geq 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- b) Gibt es eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer Umgebung der 0, so daß  $f^{(n)}(0) = n^{2n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt?