

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (H03T3A4)

Erstellen Sie für das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= |x|\end{aligned}$$

das Phasenportrait und bestimmen Sie explizite Darstellungen aller Lösungen, die für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ gegen $(0, 0)$ konvergieren. Erklären Sie ferner, warum jedes zu diesem System gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 20: (H20T3A1)

Sei $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie

$$\int_{\Omega} x_1^2 (x_1^2 + x_2^2)^2 dx$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 21: (H20T1A1)

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Konvergenz einer reellen Folge:

- a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
- b) Die Summe zweier konvergenten reellen Folgen ist konvergent und der Grenzwert der Summe ist die Summe der Grenzwerte.