

**Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis****Aufgabe 16:** (H20T1A4)Gegeben sei die reelle  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung  $\dot{x} = Ax$ .
- b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 17:** (F19T2A3)Es sei  $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$ .

- a) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix  $e^{At}$  zu  $x' = Ax$ .
- b) Bestimmen Sie die maximale Lösung von

$$x' = Ax + g(t) \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Zeigen Sie, daß die in (b) bestimmte Lösung von  $x' = Ax + g(t)$  asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 18:** (H20T2A1)

- a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und deren Art für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + (\sin y)^2$$

- b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin(y) \cos(y) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

und untersuchen Sie, welche stationären Lösungen stabil bzw. instabil sind.