# Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 10:** (H20T2A2)

Es sei $f: ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$. Weiter sei $\xi > 1$.

a) Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall $I_\xi$ mit $0 \in I_\xi$ gibt, so dass

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \xi$$

eine eindeutige Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ auf $I_\xi$ besitzt.

b) Berechnen Sie die Lösung $\lambda_\xi$ und zeigen Sie damit, dass man immer $[0,\infty[ \subseteq I_\xi$ erreichen kann.

c) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\mu_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems aus (a) an.

**Aufgabe 11:** (H19T1A4)
Sei $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = 0$$

b) Bestimmen Sie alle Werte $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

für alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to R$ der homogenen Gleichung mit dem jeweiligen Parameter $\beta$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t) = e^{-2t}.$$

Hinweis zu c): Eine Fallunterscheidung in $\beta$ ist notwendig,

**Aufgabe 12:** (H19T2A1)

a) Bestimmen Sie die Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k}$ konvergiert, Leiten Sie im Fall der Konvergenz einen möglichst einfachen Term für den Grenzwert her.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = -x^2, \quad x(1) = -2.$$

Geben Sie hierbei auch den Definitionsbereich dieser Lösung explizit an.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) - 2y(t) = \cos(2t).$$