Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F13T1A4) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 4y(t) + f(t) = 0$$

b) Zeigen Sie, daß für jede Lösung y dieser Differentialgleichung gilt:

$$y(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgabe 8: (H00T3A1)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

Man zeige: Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1) mit der Anfangsbedingung $\lambda(0) = c$. Für diese Lösung gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty \qquad \lim_{t\to-\infty} \lambda(t) = -\infty \tag{2}$$

Aufgabe 9: (F05T1A!)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -4u + 4u' \tag{3}$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \qquad \text{für } x > 0. \tag{4}$$

Durch die Substitution $x = e^t$ und $y(e^t) = u(t)$ (wegen $x > 0$) geht die obige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u(t)$ über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (4) an.