Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (H05T1A3) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = 0 \tag{1}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a) f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

b) f stetig differenzierbar und $x :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$ die maximal fortgesetzte Lösung von (1) $\Rightarrow \limsup_{t\to 1} |x(t)| = \infty$.

c) (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall $]-\delta, \delta[$ mit $\delta > 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von 0 Lipschitz-stetig.

d) f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Die Antwort ist durch Hinweis auf entsprechende allgemeine Aussagen oder Gegenbeispiel kurz zu begründen.

Aufgabe 5: (F03T1A2) Finden Sie eine Lösung λ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = (t + x(t))^2, \qquad x(0) = 0. \tag{2}$$

Was ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung? Ist diese Lösung eindeutig?

Aufgabe 6: (F03T3A5)
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $P : G \to \mathbb{R}$ und $Q : G \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen. Wann heißt eine Differentialgleichung der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ exakt auf G? Geben Sie eine Bedingung hierfür an und illustrieren Sie dies anhand des Beispiels

$$2xe^y dx + (x^2 e^y - 1)dy = 0$$

auf $G = \mathbb{R}^2$. Finden Sie diejenige Lösungskurve (in impliziter Form), die durch den Punkt $(1, 0)$ geht.